# *Комбинаторика*

# *Лекция №1*. *ПРАВИЛО СУММЫ И ПРАВИЛО ПРОИЗВЕДЕНИЯ.*

В комбинаторике существуют два *основных* *правила* – *правило суммы и правило произведения*.

Сформулируем *правило суммы* на языке теории множеств.

Пусть  – *попарно непересекающиеся* *множества* (для всех ), и пусть для каждого *i*, множество  содержит  элементов. Количество вариантов выбора одного элемента из  *или*  *или* ... *или*  равно .

Запишем приведенное правило в виде формулы:

.

Правило суммы иногда называют правилом *«или»*.

Сформулируем правило суммы для двух объектов () в иной форме.

*Если некоторый объект А можно выбрать m способами, а объект В можно выбрать другими n способами, то выбор либо А, либо В (А или В) можно осуществить т + n способами****.***

К примеру, если на первой полке стоит *5* книг по физике, а на второй *10* книг по математике, то выбрать книгу из первой *или* второй полки, можно *5 + 10 = 15* способами.

И, как мы уже говорили, при использовании правила суммы надо следить, *чтобы ни один из способов выбора объекта А не совпадал с каким-нибудь способом выбора объекта В.* Если такие совпадения есть, мы получаем, лишь *m + n - k* способов выбора, где *k* – число совпадений.

Сформулируем *правило произведения*.

Если объект  может быть выбран  способами, после чего объект  может быть выбран  способами и для любого *i*, где , после выбора объектов  объект  может быть выбран  способами, то выбор *упорядоченной последовательности* () можно осуществить  способами.

Теперь также сформулируем правило произведения для двух объектов.

*Если объект А можно выбрать т способами и если после каждого такого выбора объект В можно выбрать n* способами, то выбор пары объектов *(А, В)* в *указанном порядке* можно осуществить  способами.

Правило произведения иногда называют правилом *«и»*

Вернувшись к нашему примеру с книжными полками, имеем, что выбрать одну книгу с первой полки *и* одну книгу со второй можно  способами.

Рассмотрим задачу на применение правила произведения.

*Задача 1.*

Сколько существует пятизначных чисел, которые одинаково читаются слева направо и справа налево?

*Решение*.

В таких числах последняя цифра будет такая же, как и первая, а предпоследняя – как и вторая. Третья цифра будет любой. Это можно представить в виде *XYZYX*, где *Y* и *Z* -любые цифры от *0* до *9*, *X –* не может быть нулем, поэтому для *X* имеем *9* вариантов выбор цифры. Значит, по правилу произведения количество пятизначных чисел, одинаково читающихся как слева направо, так и справа налево, равно вариантов.

Рассмотрим задачу на применение *обоих правил*.

*Задача 2*.

Сколько трехзначных чисел начинаются с цифры *3* или *4*?

*Решение*.

Трехзначные числа, о которых идет речь в задаче, естественным образом разбиваются на два *непересекающихся* класса. К первому классу относятся числа, начинающиеся с *3*, ко второму – с *4*.

Подсчитаем количество чисел в первом классе. Первую цифру в числе мы можем выбрать одним способом, это *3*. Для второй цифры существует *10* вариантов выбора, для третьей – также *10*. По правилу произведения получаем, что всего чисел в первом классе равно . Аналогично подсчитываем количество чисел во втором классе. Оно также равно *100*. И наконец, по правилу суммы получаем, что существует *100 + 100 = 200* трехзначных чисел, начинающихся с цифры *3* или *4*.

Мы познакомились в теории множеств с *формулой включений и исключений*.

Правило суммы можно рассматривать как *частный случай* этой формулы, сформулированной для *попарно непересекающихся* *множеств.*

Вернемся к формуле включений и исключений и сформулируем ее несколько иначе.

Пусть *X* *–* конечное множество, состоящее из *N* элементови –некоторые свойства, которыми могут обладать или не обладать элементы из *X*. Обозначим через  – количество элементов, обладающих свойством , через  – количество элементов множества *X*, обладающих одновременно свойствами , …, через  – количество элементов множества *X*, обладающих одновременно свойствами  соответственно. Обозначим через  – количество элементов, не обладающих ни одним из свойств .

Общий закон состоит в том, что:

Здесь алгебраическая сумма распространена на все комбинации свойств  (без учета их порядка), причем знак *«+»* ставится, если число учитываемых свойств четно, и знак *«-»*, если это число нечетно. Например, входит со знаком *«+»*, а  со знаком *«-»*. Приведенную формулу называют *формулой включений и исключений*, поскольку сначала исключаются все предметы, обладающие *хотя бы одним* из свойств , потом включаются предметы, обладающие, *по крайней мере*, двумя из этих свойств, исключаются имеющие, *по крайней мере*, три и т. д.

Рассмотрим задачу на применение этой формулы.

*Задача 3. «Решето Эратосфена».*

Поставим такой вопрос: сколько чисел в первой сотне не делится ни на одно из чисел *2*, *3*, *5?*

*Решение*.

Обозначим через  – свойство числа делиться на *2*, через  – свойство делимости на *3* и через  – свойство делимости на *5.* Тогда  означает, что число делится на *6*,  означает, что оно делится на *10*, и  –   
что оно делится на *15*. Наконец,  означает, что число делится на *30*. Нам надо найти, сколько чисел от *1* до *100* не делится ни на *2*, ни на *3*, ни на *5*, то есть не обладает ни одним из свойств . По *формуле включений и исключений* имеем:

.

Но чтобы найти, сколько чисел от *1* до *N* делится на *n,* надо разделить *N* на *n* и взять целую часть получившегося частного. Поэтому имеем:

. . .. . .

.

В результате получаем:

.

***Задачи для самостоятельного решения.***

1. Сколько четырехзначных чисел, не превосходящих *6 000*, можно составить, используя только нечетные цифры?
2. Сколько существует целых чисел между *0* и *1000*, содержащих ровно одну цифру 6?
3. Сколькими способами можно выбрать две книги по разным темам, когда на полке находятся *15* книг по информатике, *12* книг по математике и *10* книг по химии?
4. Сколько существует номерных знаков для автомобилей, состоящих из двух латинских букв и последующих четырех цифр?
5. Сколько положительных целых чисел, меньших *1001*, делятся на *2*, *3* или *5*?
6. Пусть *S* — множество четырехзначных чисел, в чьей десятичной записи участвуют цифры: *0*, *1*, *2*, *3*, и *6*, причем *0* на первом месте, естественно, стоять не может. Какова мощность множества *S*? Сколько чисел из *S* в своей десятичной записи не имеют повторяющихся цифр?

*Лекция*  [*№2*. ***КОМБИНАТОРНЫЕ КОНФИГУРАЦИИ*.**](#_Toc377212310)

Дадим понятие выборки.

*Набор* (*комбинация*) из *k*-элементов множества  мощности *n* называется  *выборкой объема k из n элементов* или *выборкой из n элементов по k* , или просто *(n,k) выборкой*.

Выборка называется *упорядоченной*, если существенным является не только состав элементов в ней, но и *порядок* их расположения. Две упорядоченные выборки считаются различными, если они отличаются, либо составом элементов, либо порядком их расположения. Например, упорядоченные выборки *(1,2)* и *(2,1)* считаются различными, хотя и составлены из одних и тех же элементов.

Выборка называется *неупорядоченной*, если порядок следования элементов в ней не существенен. Так, соответственно, *{1,2}* и *{2,1}* считаются одной и той же неупорядоченной выборкой.

Как мы знаем, фигурные и круглые скобки подчёркивают отличие неупорядоченной выборки от упорядоченной.

В выборках могут допускаться или не допускаться повторение элементов. Выборка, в которой все элементы попарно различны, называется *выборкой без повторений*, в отличие от *выборки с повторениями*, в которую могут входить одинаковые элементы.

В зависимости от указанных свойств, выборки носят специальные названия.

* *(n,k)-размещением с повторениями* называется упорядоченная *(n,k)* выборка, элементы в которой могут повторяться;
* *(n,k)-размещением без повторений* называется упорядоченная *(n,k)* выборка, элементы которой попарно различны;
* *(n,k)-сочетанием с повторениями* называется неупорядоченная *(n,k)* выборка, элементы которой могут повторяться;
* *(n,k)-сочетанием без повторений* называется неупорядоченная *(n,k)* выборка, элементы которой попарно различны.

Рассмотрим пример, составим всевозможные *(3,2)-*выборки из элементов множества *M = {a,b,c}.*

1. *(a,a), (a,b), (a,c), (b,b), (b,a), (b,c), (c,c), (c,a), (c,b)* – это *размещения с повторениями.* Их всего *9*.
2. *(a,b), (b,a), (a,c), (c,a), (b,c), (c,b)* – это *размещения без повторений.* Их, очевидно, всего *6*.
3. *(a,b), (a,a), (a,c), (b,b), (b,c), (c,c)* – *сочетания с повторениями.* Их всего *6.*
4. *(a,b), (a,c), (b,c)* – *сочетания без повторений*. Их всего *3*.

При решении комбинаторных задач, в которых требуется определить количество некоторых выборок (*конфигураций*) из данного множества элементов, основным моментом является правильное определение *характера выборок* – упорядоченные это выборки или нет, с повторениями или без повторений.

Найдем чему равно *количество* различных комбинаторных конфигураций.

Число *(n,k)-размещений с повторениями*обозначается, как ивычисляется по формуле:

,.

Полученную формулу мы можем получить следующими рассуждениями.

На первое место выборки мы можем поставить любой из *n* элементов множества, т. е. у нас *n* способов выбора первого элемента. Поскольку повторения разрешены, то на второе место мы опять можем поставить любой элемент из того же множества и так далее, вплоть до места с номером *k* , выбрать который мы можем также *n* способами. По правилу произведения и получаем указанную формулу.

Рассмотрим задачи*.*

*Задача 1.*

Сколько трехзначных чисел можно составить из цифр 1, 2, 3, 4, 5?

*Решение.* Так как порядок цифр в числе *существенен*, цифры могут повторяться, то это будут размещения с повторениями из пяти элементов по три (*n=5, k=3)*, а их число равно .

Эту задачу мы могли бы решить, используя правило произведения.

*Задача 2*.

Сколькими способами можно раскрасить квадрат, разделенный на четыре части (на четыре равных квадрата и каждый квадрат условно имеет номер ) пятью цветами, допуская окрашивание разных частей в одинаковый цвет?

*Решение.* Порядок цветов имеет значение, цвета могут повторяться, следовательно, это *(5,4)- размещение с повторениями.* По формуле имеем:



Число всех *(n,k)-размещений без повторений* обозначается через .

Подсчитаем их число. 

На первое место выборки мы можем поставить любой из *n* элементов множества, поскольку повторения *не разрешены*, то на второе место мы можем поставить любой из *(n-1)* оставшихся элементов. На третье место – из *(n-2)* и так далее, вплоть до *k* места, куда можно поставить любой из *(n-k+1)*элементов. По правилу произведения имеем:

 , 

*Задача 3*.

Сколько различных четырехзначных чисел можно образовать из цифр *1*, *2*, *3*,…,*9*, если все цифры в каждом числе различны?

*Решение*. Порядок цифр существенен, цифры не повторяются, это *(9,4)*-*размещение без повторений*. Имеем:



*Задача 4*.

Рассмотрим задачу о квадратах в предположении, что различные части окрашиваются разными цветами. В этом случае также имеем *(5,4)- размещение без повторений.* По формуле имеем:



Размещения без повторений из *n* элементов по *n* называются *перестановками*из *n* элементов без повторений или *перестановками* множества *X*. Их число обозначается и вычисляется по формуле:

, .

Перестановки удобно представлять матрицами. Например,



*Задача 5*.

Рассмотрим задачу об известном *квартете Крылова*. Вероятно, крыловские музыканты так и не перепробовали всех возможных мест. Однако способов не так уж и много. Здесь идет перестановка из четырех элементов, значит, число перестановок равно:



*Задача 6.*

Сколько различных шестизначных чисел можно составить из цифр *0*, *1*, *2*, *3*, *4*, *5*, если цифры в числе не повторяются?

1. Найдем количество всех перестановок из этих цифр: 
2. Цифра *0* не может стоять впереди числа, поэтому от этого числа необходимо отнять количество перестановок, при котором *0* стоит впереди, а это 

В результате имеем:

различных чисел.

*Разупорядочением* называется *перестановка* *n* *различных упорядоченных символов*, при котором ни один символ не остается на своем месте. Количество разупорядочений на *n* различных *упорядоченных* символах обозначается 

Например, при *n = 3*,  и разупорядочениями будут перестановки:

 и 

В общем случае, для *n>1* количество разупорядочений на *n* *различных упорядоченных* символах вычисляется по формуле:



*Задача 7*.

Семь джентльменов отправляются на вечеринку и сдают там свои шляпы. Сколькими способами непутевый гардеробщик может вернуть шляпы так, чтобы ни один из джентльменов не получил свою шляпу? Имеем разупорядочения из *7* элементов, их число равно:

 .

Рассмотрим *перестановки с повторениями.*

Пусть имеются предметы *r* *различных* видов. Сколько различных комбинаций (перестановок) можно сделать из  предметов первого вида,  предметов второго вида,…,  предметов вида *r?* Число предметов в каждой перестановке .

Такие комбинации называются *перестановками с повторениями*. Их число обозначается  и вычисляется по формуле:

,

где *n* – количество всех элементов в перестановке,  – количество элементов каждого вида соответственно.

*Задача 8*.

Рассмотрим сколькими способами можно переставить буквы в слове *«ананас»?*

В слове шесть букв. Среди них есть одинаковые буквы:

; ; .

Следовательно, число различных перестановок равно:

.

*Задача 9*.

Сколькими способами можно расположить в ряд *5* черных, *4* белых и *3* красных фишки?

Это перестановки с повторениями, имеем:



*Сочетаниями без повторений из n элементов по k*называются   
неупорядоченные *k* -выборки из *n* элементов без повторений. Каждое *(n,k)-сочетание без повторений* можно упорядочить  различными способамии получить  различных *(n,k)*-размещений без повторений. Таким образом, количество вариантов при сочетании будет меньше количества размещений в  раз. Ихчисло обозначается  и вычисляется по формуле:

. 

Сочетания из *n* по *k* без повторений образуют *k-элементарные подмножества* исходного множества мощности *n*.

В современной терминологии  обозначается как .

*Задача 10.*

Сколько трехкнопочных комбинаций существует на кодовом замке (все три кнопки нажимаются одновременно), если на нем всего *10* цифр.

*Решение*. Так как кнопки нажимаются *одновременно*, то выбор этих трех кнопок – сочетание. Отсюда возможное количество комбинаций:

вариантов.

*Задача 11 .*

У одного человека *7* книг по математике, а у второго – *9*. Сколькими способами они могут обменять друг у друга две книги на две книги.

*Решение*. Так как порядок следования книг не имеет значения, то выбор двух книг – сочетание. Первый человек может выбрать *2* книги из *7*.

 способами.

Второй человек может выбрать *2* книги из *9*

 способами.

Значит, всего по правилу произведения возможно  вариантов обмена книг.

Числа  называются также *биномиальными коэффициентами*, поскольку они возникают как коэффициенты при раскрытии скобок в *биноме Ньютона*.

, .

Используя эту формулу, найдем, например, разложение :

.

Получили всем известное соотношение. Напомним, что .

Число *(n,k)-сочетаний с повторениями* обозначается  и вычисляется по формуле:

, 

Получим данную формулу следующими рассуждениями.

Поскольку порядок в наших выборках значения не имеет, а повторы разрешены, мы можем сгруппировать вместе одинаковые элементы, разделив группы какими-нибудь *метками*.

Предположим, например, что мы сделали выборку, состоявшую  
из *пяти* букв, каждая из которых может быть одной из *a*, *b* и *c*.

Выборку, состояoую из двух *«a»*, одной «*b*» и двух «*c*», можно записать как аа|*b*|*cc*, а выборка из одной буквы *«а»* и четырех букв *«c»*  
будет выглядеть так: *а*||*cccc*. Договоримся, что слева от первой метки либо стоят буквы *«а»*, либо *ничего*, справа от второй (последней) метки – либо *«c»*, либо ничего, а буквы *«b»*, если они присутствуют в выборке, стоят между метками.

Таким образом, можно считать, что мы всегда смотрим на семь ячеек (пять букв и две метки), причем различные выборки будут отличаться ячейками, в которых стоят метки. Получаем, что *состав выборки полностью определяется расположением меток по ячейкам*. Например, расположение меток в первой и четвертой ячейке соответствует выборке |*bb*|*ccc*.

Значит, число всех таких сочетаний с повторениями совпадает с количеством способов, которыми мы можем поместить *две* метки в *семь* ячеек. Это количество есть нечто иное, как число всех *(7, 2)*-сочетаний без повторений (выбираем *2* позиции меток из *7* возможных).

В общем случае нам потребуется *n-1* метка и *k* объектов. Таким образом, у нас будет *n-1+ k* ячеек для заполнения . Значит, число (*n, k*)-сочетаний c повторениями равно числу (*n-1+ k, n-1* ) сочетаний без повторений:

Эту формулу можно было получить и кодируя выборки двоичными векторами (кодов), состоящими из *k* нулей *n-1* единиц. В этом случае считаем количиство векторов размером *n-1+ k*, имеющих *k* нулей (выбираем позиции нулей)

*Задача 12*.

В кондитерском магазине продавались *4* сорта пирожных: эклеры, песочные, наполеоны и слоеные. Сколькими способами можно купить *7* пирожных.

*Решение*. Покупка не зависит от того, в каком порядке укладывают купленные пирожные в коробку. Сорта пирожных в покупке могут повторяться. Имеем сочетание с повторениями, *n = 4*, *k = 7*. .

*Задача 13*.

Цветочница продает розы четырех разных сортов. Сколько разных букетов можно составить из дюжины роз?

*Решение*. Каждый букет – это неупорядоченная выборка *12* роз с повторениями четырех возможных типов. Имеем число вариантов составления букета:



***Задачи для самостоятельного решения.***

1. Сколькими способами можно выбрать комитет, включающий *6* мужчин и *8* женщин, из группы, состоящей из *12* мужчин и *20* женщин?
2. В скачках участвуют десять лошадей. Сколько существует вариантов призовой тройки лошадей?

Пять пар идут в кино. Сколькими способами они могут занять места, если   
а) они могут сидеть в любом порядке? б) все пять пар сидят подряд?

1. Пароль на компьютере состоит из шести символов. Первые два из них строчные буквы латинского алфавита (всего *26* букв), а оставшиеся четыре могут быть как цифрами, так и строчными буквами. Сколько можно придумать различных паролей?
2. Комитет из *20* членов избирает председателя и секретаря. Сколькими способами это можно сделать?
3. Предстоит выбрать команду четырех игроков в гольф из пяти профессиональных игроков и пяти любителей. Сколько разных команд может состоять из трех профессионалов и одного любителя?
4. Сколько четырехзначных чисел, не превосходящих 6 000, можно составить, используя только нечетные цифры?
5. Имеются семь различимых шаров, и требуется положить три шара в первую коробку, два шара — во вторую и два шара — в третью коробку. Сколькими способами можно это сделать?
6. Предположим, что *12* книг, включающих *4* одинаковых учебника по математике, *6* одинаковых учебников по информатике, *2* одинаковых учебника по химии, следует расставить на полке. Сколькими способами это можно сделать?
7. Пусть задано множество *А = {a, b, с, d, е, f, g, h}*. Сколько существует а) трехэлементных подмножеств множества *А*? б) пятиэлементных подмножеств множества *А*, содержащих *b*? в) пятиэлементных подмножеств множества А, не содержащих *b*?
8. Сколько существует способов разделить *10* человек на две команды по *5* человек для игры в баскетбол?
9. Сколькими способами можно расставить в ряд для фотографирования пять мальчиков и шесть девочек, если ни две девочки, ни два мальчика не должны стоять рядом?
10. В зоомагазине продаются *5* черепах, *7* ящериц и *12* мышей. Сколько существует способов выбрать себе *2* черепахи, *3* ящерицы и *5* мышей?

*Лекция №3-4.* ***РЕКУРРЕНТНЫЕ СООТНОШЕНИЯ.***

Дадим определение *последовательности*. Если каждому натуральному числу  поставлен в соответствие какой-то элемент  из некоторого множества *A*,то говорят, что задана последовательность элементов множества *A*:  Это могут быть последовательности чисел или элементов какого-то другого множества. Например, последовательность биномиальных коэффициентов  при фиксированном значении числа *n* – пример *конечной* последовательности *целых положительных* чисел. Если мы знаем, как определяется элемент последовательности  при каждом значении , то такое задание последовательности называется *явным*. Например, значение биномиальных коэффициентов вычисляется по формуле: .

Последовательность может быть описана *неявно*, *рекурсивно* – с помощью *рекуррентного соотношения*.

Последовательность  называется *рекуррентной порядка* *k* () , если существует *формула* , с помощью которой каждый последующий элемент последовательности  вычисляется по *k* предыдущим элементам . Данная формула называется *рекуррентным соотношением порядка k* . Заметим, что *первые* *k* *элементов* последовательности должны быть заданы.

Например, последовательность чисел *Фибоначчи 0, 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13,…*задается рекуррентным соотношением *2* порядка, данную числовую последовательность мы обозначили как :

 *(1)*

Можно записать последовательность и в другом виде:

Последовательность *Фибоначчи* является примером *линейных однородных рекуррентных**соотношений с постоянными коэффициентами порядка k*.

Перейдем к общему случаю.

Рекурсивное соотношение вида:

*(2)*

называется *линейным рекуррентным соотношением порядка k*.

Рассматриваемое отношение названо *линейным* рекуррентным соотношением, поскольку показатель степени каждого равен единице. Другими словами, ни одно из не возводится в какую-либо степень, кроме первой.

Если в данном *линейном рекуррентном соотношении* функция, то такое соотношение называется *линейным однородным рекуррентным соотношением порядка k*.

Если в соотношении *(2)* коэффициенты для каждого *i* являются константами, то такое соотношение называется *линейным рекуррентным соотношением с постоянными коэфициентами порядка k*. Если дополнительно к этому условию выполняется условие , то соотношение принимает вид:

, , *(3)*

где, как мы уже отмечали,  – постоянные коэффициенты и называется *линейным однородным рекуррентным**соотношением с постоянными коэффициентами порядка k*.

Для нахождения *частного* решения *(3)*должны быть эаданы значения – *k* начальных условий, (начальные значения последовательности ). *(3a)*

Рассмотрим еще один пример. Последовательность чисел *Каталана* задается *линейным однородным рекуррентным соотношения*, имеющим вид:

Как мы видим, в данном случае коэффициенты не являются постоянными и являются функциями от *n*.

В *явном* виде формула для вычисления последовательности чисел *Каталана* имеет вид:

Последовательность чисел *Каталана* определяет, например, число неизоморфных упорядоченных корневых бинарных деревьев или число *триангуляций* (разбиение на треугольники) выпуклого (*n+2)* многоугольника.

Существует общий метод решения (т.е. отыскания  как функции *n*) данных рекуррентных соотношений. Мы рассмотрим методику решения *линейных однородных рекуррентных**соотношений с постоянными коэффициентами порядка k* на примере задачи *Фибоначчи* – *(1)*.

Решение рекуррентного соотношения будем искать в виде:

.

Подставив это решение в рекуррентное соотношение *(1)*, получим:

.

Разделив обе части этого соотношения на , имеем:



Или:

.

Это уравнение называется *характеристическим* для данного рекуррентного соотношения. Решив квадратное уравнение, получим:

.

Общее решение нашего рекуррентного соотношения имеет вид:

, *(3)*

подставив в *(3)* корни характеристического уравнения, имеем:



Решение рекуррентного соотношения *k* –*го* порядка называется *общим*, если оно зависит от *k* произвольных постоянных  и путем подбора этих постоянных можно получить любое частное решение данного соотношения. Используем начальные условия для нахождения коэффициентов :



.

Решая систему, находим:

 .

 , 

Подставив полученные коэффициенты в *(3)*, получим решение рекуррентного соотношения *(1)*для последовательности чисел *Фибоначчи*.

,

формулу *Бине* для вычислений чисел *Фибоначчи*. Это выражение при всех натуральных значениях *n* принимает целые значения.

Рассмотрев ситуацию, когда характеристическое уравнение имело два различных (простых)действительных корня, перейдем к случаю кратных корней.

Напомним определение *простого корня* и *корня кратности* *p* для непрерывной нелинейной функции *f(x).*

Если в точке  вместе с функцией  обращаются в ноль и ее производные до *(p-1)* порядка включительно: , то  называют *корнем кратности* *p*. Если в точке  выполняется условие , то  называется *простым корнем.*

В этом случае общее решение для рекуррентного соотношения *2-го* порядка будет иметь вид:

. *(4)*

Рассмотрим пример, решим рекуррентное соотношение:



Характеристическое уравнение имеет вид:

.

Решая его, получаем кратный (*кратности 2*) корень .

Общее решение имеет вид:

.

Коэффициенты найдем, исходя из начальных условий:



Отсюда получаем , .

Решение имеет вид:

.

Рассмотренные примеры позволяют изложить общий прием решения *линейных однородных рекуррентных**соотношений порядка k с постоянными коэффициентами*. Рассмотрим рекуррентноесоотношение *(2)*.

Будем предполагать, что характеристическое уравнение имеет простые корни. Решение соотношения ищем в виде:.

Подставляя это выражение в *(2)* и разделив обе части на, получим полином *k* – степени:

.

Это уравнение имеет *k* корней: . Тогда общее решение соотношения имеет вид:

.

Неизвестные коэффициенты  находим, используя начальные условия *(2a)*, которые позволяют составить систему линейных алгебраических уравнений относительно этих коэффициентов.

Последовательность биномиальных коэффициентов (числа сочетаний) можно также задать рекуррентным соотношением.

Приведем рекуррентное соотношение для числа сочетаний:

. *(5)*

Докажем его следующими рассуждениями. Составим *(n,k)*-сочетания из элементов  некоторого множества *A* и разобьем их на два *непересекающихся* класса. Для этого зафиксируем некоторый элемент . В первый класс войдут сочетания, содержащие элемент  , а во второй – сочетания, не содержащие этого элемента.

Рассмотрим *первый* класс. Т.к. один элемент, , мы уже выбрали, то нам останется выбрать *(k-1*) элемент из *(n-1)* элемента.Число этих сочетаний равно . Поэтому в первый класс входит  комбинации.

Сочетания второго класса являются *k*-сочетаниями, составленными из *(n-*1) элемента . Поэтому их число равно *.* Поскольку любое  
*k*-сочетание из элементов , принадлежит одному и только одному из этих классов, а общее число этих сочетаний равно ,  то приходим к равенству:



Полученное рекуррентное соотношение широко используется для вычисления числа сочетаний. На его основе составляется *треугольник* *Паскаля*

*1  
1 1  
1 2 1  
1 3 3 1  
1 4 6 4 1  
1 5 10 10 5 1  
1 6 15 20 15 6 1*

В этом треугольнике строкам соответствуют значения *n = 0, n = 1, n = 2* и так далее, а диагоналям – значения *k = 0, k = 1, k = 2* и так далее (сверху вниз и слева направо). Каждое число внутри треугольника *Паскаля* равно сумме двух чисел, расположенных над ним.

Так, чтобы вычислить значение  с помощью треугольника *Паскаля*, необходимо по горизонтали выбрать *7*-ю строку и *5*-ю диагональ (нумерация начинается с *0*). На пересечении имеем число *15*, что и является значением искомого сочетания.

Легко видеть, что каждый элемент строки треугольника Паскаля вычисляется из элементов предыдущей строки, согласно найденному рекуррентному соотношению: .

Легко заметить также, что *(n+1)*-ый ряд состоит из коэффициентов разложения . Например*,* при *n = 5* имеем следующие коэффициенты в разложении: *1,5,10,10, 5,1.*

При разложении степени  коэффициенты при произведениях , , рассчитываются по формуле:

 *(число перестановок с повторениями)*

и носят название *полиномиальных* или *мультиномиальных* коэффициентов.

Например, вычислим коэффициент при произведении  в разложении

.

Он равен: .

***Свойства биномиальных коэффициентов.***

Рассмотрим некоторые свойства биномиальных коэффициентов.

1. .



Ранее мы подробно рассматривали данное свойство.

1. 

Докажем это равенство:   
Оно сразу вытекает из формулы:

, .

Ведь, если заменить в этой формуле *k* на (*n-k),* то (*n*-*k)* заменится на *n-(n-k) = k* и в результате множители, стоящие в знаменателе поменяются местами.

Но равенство легко доказать и не прибегая к явному виду числа сочетаний. Если выбрать из *n* различных элементов некоторое *k*-сочетание, то останется дополнительное сочетание из (*n—k)* элементов, а дополнительным к полученному *(n* - k)-сочетанию является исходное *k*-сочетание. Таким образом, *k* -сочетания и *(n—k*)-сочетания образуют взаимно дополнительные пары, потому число этих сочетаний одно и то же.

Значит, . Нашли важное свойство биноминальных коэффициентов.

1. Далее, полагая в (7) *z=1*, получим:



Как мы уже говорили, число сочетаний  равно числу *k*-элементарных подмножеств некоторого множества мощности *n*. Просуммировав, *k* от *0* до *n* , мы получим количество *всех* подмножеств множества – мощность булеана.   


1. Полагая в ( 7) *z = -1*, будем иметь:



Это значит, что общее число сочетаний, имеющих четное число элементов, равно числу сочетаний, имеющих нечетное число элементов.

1. , , тождество Коши.



ЛИТЕРАТУРА

1. Андерсон Д. Дискретная математика и комбинаторика. – СПб: Вильямс, 2003. – 960 с.
2. Хаггарти Р. Дискретная математика для программистов – М.: Техносфера, 2003. – 320 с.
3. Липский В. Комбинаторика для программистов – М. Мир, 1988. – 200 с.
4. Кофман А. Введение в прикладную комбинаторику – М. Наука, 1975. – 480 с.
5. Нефедов В.Н. Осипова В.А. Курс дискретной математики: Учеб. Пособие.
6. Новиков Ф.А. Дискретная математика для программистов: учеб. пособие – 2-е изд., перераб. и доп. - СПб.: Питер, 2003. – 364 с.
7. Яблонский С.В. Введение в дискретную математику. – М: Наука, 1986. – 384 с.